

2018/ 5/9
الدراسة

الموضوع: محاضرة (7)

المسائل الحدية:

١ **قديم** في هذا الفصل سنتناول مسألة القيم الحدية للمعادلات للتفاضلية العادية والجزئية.
لها من أهمية كبرى في التطبيقات الفيزيائية والهندسية.

٢ **مسألة القيم الحدية** للمعادلات للتفاضلية العادية:

في المسائل الحدية للمعادلات للتفاضلية العادية يُعطى قيمة الدالة المجهولة (الحل) في نقطتين، وهاتين النقطتين هما حدود المجال الذي يطلب تعيينه وتعرف الحل عليه.

نمثال من أجل حل المسألة الحدية التالية:

$$L(y) \equiv a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \quad \dots [1]$$

حيث $a \leq x \leq b$ (المجال)

والشروط الحدية المفروضة هي:

$$\left. \begin{aligned} \alpha y(a) + \beta y'(a) &= 0 \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots [2]$$

حيث a و b طرفي المجال (حدود التكامل).

هنا المطلوب: إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية [1] الذي يمتثل للمعادلة [2] وتعيين

الشوايت (الافتراضية) الخاصة بالحل العام، بحيث يمتثل أيضاً لشروط الحدية [2].

[ملاحظة: الحل مع الشروط الحدية]

ملاحظة: إن المسألة الحدية المطروحة ليست قابلة للحل دائماً، فإذا كانت قابلة

الحل فإن هذا الحل ليس وحيداً. [وهذا يمكن سؤاله كونه، إن هناك نقطة محددة وحيدة، فبمجرد

من تلك النقطة والشروط الابتدائية]

$$y'' - y = 0 \quad \dots (1)$$

حيث $y(x)$ الذي يمتثل لشروط الحدية

$$[y(0) = 3 \quad y(1) = y'(1) = 1] \quad \dots (2)$$

حيث طرفي المجال هنا 0 و 1

الحل من المعروف أن كل حلول المعادلة السابقة (1) هي حلول بالمعادلة:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x \quad (*)$$

للتأكد من ذلك

نضع $y = e^x$ ونشتقها ونعوض

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \text{معادله مميزة}$$

$$\lambda = \pm 1$$

إذاً الحلول هي

$$y = e^x$$

$$y_1 = e^x$$

$$y_2 = e^{-x}$$

حيث C_1 و C_2 ثابتان اختياريا في الحل العام.
يمكننا التأكد من ذلك

بأننا لنحدد قيم الثابتين C_1 و C_2 بحيث يحقق هذا الحل (*) الشروط الحدية (2)

وذلك من خلال عملية ملاء هذه المعادلة مع الشروط (2) كما يلي:

من الشرط الأول حيث:

$$y|_{x=0} = 3 \Rightarrow 3 = C_1 + C_2 \quad (3)$$

ومن الشرط الثاني نجد حيث:

$$y'|_{x=1} = y|_{x=1} = 1$$

$$(*) \Rightarrow 1 = C_1 e^{-1} + C_2 e^1 \quad (4)$$

وبإشتقاق (4) مرة يكون:

$$y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^x$$

وبالتعويض في الشرط الثاني في المعادلة الأخيرة:

$$1 = -C_1 e^{-1} + C_2 e^1 \quad (4')$$

إذاً نجمع (4) و (4') يكون:

$$2 = 2C_2 e^1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{e}$$

ولحساب C_1 نعوض في (3) النتيجة الأخيرة:

$$(3) \Rightarrow C_1 = 3 - C_2 \Rightarrow C_1 = 3 - \frac{1}{e}$$

وبه نكون في الحل (*) فنكتب الحل المطلوب:

$$(*) \Rightarrow y = (3 - \frac{1}{e}) e^{-x} + \frac{1}{e} e^x$$

وهو الحل المطلوب للمبدأ في الطريقة المبسطة.



مثاله لدينا المعادلة التفاضلية (مسألة هاردي) (1) $y'' + y = 0$

والشروط الحدية

$$y(0) = 0$$

$$y(a) = y_0 \quad (2)$$

$$y_1 = \sin x$$

$$y_2 = \cos x$$

$$y_3 = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$y_4 = \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$y_5 = \sin x$$

الحل (نعم) في الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية هو

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (*)$$

حيث C_1 و C_2 ثابتان اختياريتان.

ولنحدد ونسب قيمة الثابت C_1 و C_2 بحيث

تتفق الحل (*) الشروط الحدية (2)

وذلك بلا دقة الكيفية الشروط الحدية (2) كما يلي:

نلاحظ من المسألة أن طرفي المسألة هما a و 0

$$(I) \Rightarrow (*) \Rightarrow 0 = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)$$

$$\Rightarrow C_1 = 0$$

وأما من أجل حساب C_2 فلدينا من الحل

دعنا نكتب II يكون:

$$y(a) = C_2 \sin a = y_0$$

$$y_0 = C_2 \sin a$$

ونتأكد حسب a :

$$C_2 = \frac{y_0}{\sin a}$$

وإذا كانت $a \neq n\pi$ عندئذ:

وبالتالي يوجد في هذه الحالة حل وحيد للمسألة الحدية وهو

$$y = \frac{y_0}{\sin a} \sin x$$

وإذا كانت $a = n\pi$ فإن الشروط الحدية عندئذ

من أجل $y_0 = 0$ يكون محقق من أجل أي قيمة لـ C_2 وبالتالي لدينا مجموعة حلول

للمسألة للمعادلة (*) $y = C_2 \sin x$ حيث C_2 ثابتة كبرى

ب) أمّا حال كانت $a = n\pi$ و $y_0 \neq 0$ فإن الشرط الكهني لهذه الحالة $y_0 = C_2 \sin a$ غير محقق والمعادلة (المسألة المدية) لا تملك أي حل (مستحيلة) وهو المطلوب.

2-1. دالة غرين: دالة غرين للمسألة المدية [1] و [2] السابقة في الدالة التالية:

$$(G(x, s))$$

المعرفة عندما $x \in [a, b]$ و $s \in (a, b)$ حيث $a \neq s$ من أجل كل قيمة s في المجال $[a, b]$ تحققت الخواص التالية:

(P) عندما $x \neq s$ فإن الدالة $G(x, s)$ تحققت المعادلة التفاضلية:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad [3]$$

(ب) عندما $x = a$ و $x = b$ فإن الدالة $G(x, s)$ تحققت الشرط الكهني [2]

(ج) عندما $x = s$ فإن الدالة $G(x, s)$ تكون مستمرة بالنسبة للمقولات x و مشتقتها بالنسبة لـ x على تلك الانقطاع من النوع الأول يساوي $\frac{1}{a(x)}$ هذا يعني أن

$$G(s+0, s) = G(s-0, s) \quad \text{استمرار}$$

$$G'_x(s+0, s) - G'_x(s-0, s) = \frac{1}{a(s)} \quad \text{انقطاع من النوع الأول}$$

[4]

وطبقاً إلى أجل إيجاد دالة غرين للمسألة المدية [1] و [2] يجب إيجاد حلين $y_1(x)$ و $y_2(x)$ (حليين) (مفردتين) للمسألة [3] المتجانسة من [1] والذات يحققان شرط الكهني [2].

إذا كان $y_1(x)$ لا يحقق باء واحد الشرطين الكهنيين [2] فإن دالة غرين تكون موجودة ويمكن البتة عنها باستكمال.

$$G(x, s) = \begin{cases} \psi(s) y_1(x) & \text{و } a < x < s \\ \psi(s) y_2(x) & \text{و } s < x < b \end{cases} \quad [5]$$

حيث أن الدالتين $\psi(s)$ و $\psi(s)$ يمكن اختيارهما بحيث تحقق المعادلة [5] (دالة غرين).

$$\begin{cases} \psi(s) y_2(s) = \psi(s) y_1(s) & \text{و } x = s \\ \psi(s) y_2(s) - \psi(s) y_1(s) = \frac{1}{a(s)} & \text{و } x = s \end{cases} \quad [6]$$

عندئذ وبعد إيجاد دالة غرين هذه وبهذه الطريقة فإن حل المسألة الكمية (لا كذا) يُعبر عنه بالصيغة:

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds \quad [7]$$

المعادلة المتجانسة: $y'' = 0$ لها حركتين

التي هي $y_1(x) = e^{+x}$ و $y_2(x) = e^{-x}$

التي هي $y_1(x) = e^{+x}$ و $y_2(x) = e^{-x}$

المعادلة المتجانسة: $y'' = 0$ لها حركتين

التي هي $y_1(x) = e^{+x}$ و $y_2(x) = e^{-x}$

بنسبة استخرج دالة غرين للمسألة الكمية التالية:

$$y'' - y = f(x)$$

حيث $f(x)$ محدود في المجال $x \in (-\infty, +\infty)$

الحل: أولاً نحل المعادلة المتجانسة المتفرقة للمعادلة

المعطاة [7] (صفر) وهو:

$$[y = c_1 e^{+x} + c_2 e^{-x}]$$

هاتين فاصتين هما:

$$y_1(x) = e^{+x}$$

$$y_2(x) = e^{-x}$$

نلاحظ أن الحل الخاص:

$$y_1(x) = e^{+x}$$

محدد عند $x \rightarrow -\infty$

$$y_2(x) = e^{-x}$$

وكذلك الحل الخاص:

محدد عند $x \rightarrow +\infty$

ونلاحظ أن الشرط الأول لا يحقق الشرطين الآخرين فإحدى الحركتين

لذلك فالدالة غرين للمسألة الكمية هي تلك الشكل:

$$G(x, s) = \begin{cases} \psi(s) e^x & \text{و } -\infty < x < s \\ \varphi(s) e^{-x} & \text{و } s < x < +\infty \end{cases}$$

حيث الدالتين $\varphi(s)$ و $\psi(s)$ تتعينان من العلاقتين التابعتين [مسألة]

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \psi(s) e^{-s} &= \varphi(s) e^s \\ -\psi(s) e^{-s} &= \varphi(s) e^{s+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{بالحل المشترك}$$

فيكون

بالدالة ذلك بنفسك $\varphi(s) = -\frac{1}{2} e^{-s}$ $\psi(s) = -\frac{1}{2} e^s$
ومن هنا يتج أن (أ) (د) (أ) والة فنون للمسألة الكمية في 1

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{1}{2} e^{x-s} & \text{و } -\infty < x < s \\ -\frac{1}{2} e^{s-x} & \text{و } s < x < +\infty \end{cases}$$

وهو المطلوب

المطلب (2) ثم اكتب عبارة الكل للمسألة الكمية المعطاة بدلالة فرييه المتأخرية
ولدينا صيغة الكل بدلالة فرييه في 1

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds \Rightarrow$$

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, s) f(s) ds \Rightarrow$$

$$y(x) = \int_{-\infty}^x -\frac{1}{2} e^{x-s} f(s) ds - \int_x^{+\infty} \frac{1}{2} e^{s-x} f(s) ds$$

حيث $x=s$

وهو المطلوب

لواعطانا شيئا لـ (s) ففهمنا
في العبارة ذلك

بمثال وقيمة استخرج دالة فرييه للمسألة الكمية

$$y'' = f(x)$$

$$y(-1) = y(1) = 0$$

$$1 < x < -1$$

